Università degli Studi di Ferrara

FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E NATURALI
Corso di Laurea in Matematica
Indirizzo: Matematica Pura

I TEOREMI DI PICARD SULLE SINGOLARITÀ ESSENZIALI

Relatore:
Chiar.mo Prof.
ANDREA DEL CENTINA

Laureanda:
ALICE PAVARIN

Anno Accademico 2006-2007

Cultura è cercare una via verso l'altro, è lasciarsi provocare dalla storia in movimento; non è possedere un magazzino ben fornito di notizie, ma un buon modo di comprendere la vita. È un po' come la filosofia: ognuno è tanto più filosofo quanto più è uomo (Pierluigi Di Piazza).

Indice

Introduzione

Una fonction entière, qui ne
devient jamais ni à a ni à b est
nécessairement une costante. (Una
funzione intera che non è mai
uguale ad a e b è una costante).
É. Picard, 1879

Una *funzione intera* è una funzione olomorfa in tutto $\mathbb{C}$. La funzione esponenziale e^z assume tutti i valori complessi eccetto zero, le funzioni $\sin z$ e $\cos z$ assumono ogni valore complesso. Un famoso teorema di Émile Picard [1856–1941] asserisce che *ogni funzione intera non costante omette al più un valore complesso.* Questi è il cosiddetto "piccolo" teorema di Picard, sorprendente generalizzazione del teorema di Liouville (ogni funzione intera limitata è costante) e del teorema di Casorati–Weierstrass per le trascendenti intere, diretta conseguenza del più noto teorema di Casorati–Weierstrass sul comportamento di una funzione $f \in \mathcal{O}(R)$ nell'intorno di una sua singolarità essenziale c (per un qualunque intorno U di c, l'insieme $f(U \cap R)$ è denso in $\mathbb{C}$): ogni funzione intera non razionale ha una singolarità essenziale all'infinito, dunque il codominio di una tale funzione è denso in $\mathbb{C}$. Il "piccolo" teorema di Picard è generalizzato dal "grande" teorema di Picard: *in un qualunque intorno di una singolarità essenziale, una funzione olomorfa assume ogni valore complesso eccetto al più uno.* È chiaro che questo teorema perfeziona il teorema di Casorati–Weierstrass generale.
Picard provò i teoremi sopra ricordati nel 1879 con l'aiuto delle funzioni el-

littiche (v. [P]). Una prima dimostrazione "elementare" (cioè senza ricorrere alle funzioni ellittiche) del "piccolo" teorema di Picard fu data da Émile Borel nel 1896. La teoria giunse ad una sorprendente svolta nel 1924 quando André Bloch scoprì il teorema sulla "taglia" dell'immagine del disco unitario sotto una mappa olomorfa. Oggi i teoremi di Picard si fanno discendere sostanzialmente dal teorema di Bloch (1925) e da un teorema di Montel sulle "famiglie normali" di funzioni olomorfe (1927).

La tesi è divisa in 3 capitoli. Nel primo si ripassa la teoria riguardante le singolarità, anche all'infinito, delle funzioni olomorfe. Il secondo capitolo è dedicato alla dimostrazione del teorema di Bloch e alla dimostrazione del "piccolo" teorema di Picard. Il terzo capitolo è dedicato al "grande" teorema di Picard. Si introduce la nozione di famiglia normale e si prova il teorema di Montel, si prova poi un teorema di Vitali (1903) sulle successioni di funzioni olomorfe. Quindi, via un teorema di Schottky (1904), si arriva alla dimostrazione del "grande" teorema di Picard.

Capitolo 1

Singolarità isolate di funzioni olomorfe

Sia R una regione di $\mathbb{C}$, se $f : R \to \mathbb{C}$ è olomorfa in R, scriveremo $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$.

Definizione 1.0.1. Sia R una regione di $\mathbb{C}$ e sia f una funzione olomorfa in R. Un punto c di $\mathbb{C}$ è detto *singolarità isolata* di f, se esiste un disco $\Delta = \Delta(c, r)$ tale che f è olomorfa in $\Delta^* := \Delta \setminus \{c\}$. Se un tale Δ non esiste, allora c è detto *singolarità non isolata* di f. È chiaro che l'insieme delle singolarità isolate di una funzione olomorfa sarà un sottoinsieme discreto di $\mathbb{C}$.

Esempi.

- La funzione $f(z) = 1/z$ ha in 0 la sua unica singolarità e dunque 0 è una singolarità isolata di f.
- I punti $\zeta = \frac{1}{2}\pi + n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$ sono i soli punti singolari della funzione $f = (\cos(z))^{-1}$, essi sono tutte singolarità isolate di f.
- La funzione $f(z) = e^{1/z}$ ha in 0 la sua unica singolarità che è dunque isolata.
- La funzione $(\cos z^{-1})^{-1}$ ha in 0 una singolarità non isolata, infatti le singolarità della funzione ammettono 0 come punto di accumulazione.

Le singolarità isolate di una funzione si classificano secondo il comportamento di questa in un intorno dei punti di singolarità.
Sia c una singolarità isolata per f, allora quando $z \to c$ si possono presentare tre casi:

- $|f(z)|$ si mantiene limitato, in questo caso c è detta *singolarità rimovibile*;
- $|f(z)|$ non è limitato ed esiste un intero positivo n tale che $|(z-c)^n f(z)|$ è limitato in un intorno di c, in questo caso c è detta *singolarità polare* o semplicemente *polo*;
- $|f(z)|$ non è limitato e non esiste alcun intero positivo tale che $|(z-c)^n f(z)|$ è limitato in un intorno di c, allora il punto c è detta *singolarità essenziale* di f.

Approfondiamo lo studio del comportamento di un funzione olomorfa nell'intorno dei tre diversi tipi di singolarità isolate.

1.1 Singolarità rimovibili e polari

Il seguente teorema è noto come "teorema di estendibilità" ed è dovuto a Riemann:

Teorema 1.1.1. *Sia R una regione e sia $D \subset R$ un sottoinsieme discreto privo di punti di accumulazione in R. Per una funzione $f \in \mathcal{O}(R \setminus D)$ sono equivalenti i seguenti fatti:*

1) *f è estendibile olomorficamente in R,*
2) *esiste una funzione g continua in R tale che $g_{R\setminus D} = f$,*
3) *f è limitata in modulo in un intorno di ciascun punto di D,*
4) $\lim_{z\to c}(z-c)f(z) = 0$ *per ogni $c \in D$.*

Dimostrazione. Non perdiamo in generalità se supponiamo D costituito dal solo punto 0. Le implicazioni 1) $\Rightarrow$ 2) $\Rightarrow$ 3) $\Rightarrow$ 4) sono ovvie, basta quindi dimostrare l'implicazione 4) $\Rightarrow$ 1). Poniamo

$$g(z) = \begin{cases} zf(z) & \text{per } z \in R \setminus \{0\} \\ 0 & \text{per } z = 0. \end{cases}$$

In virtù della 4) $g(z)$ è continua in tutto R. La funzione $h(z) := zg(z)$ è derivabile in $z = 0$, infatti per $z \in R \setminus \{0\}$ si ha

$$\frac{h(z) - h(0)}{z} = g(z)$$

e passando al limite per $z \to 0$ otteniamo

$$\lim_{z \to 0} \frac{h(z) - h(0)}{z} = h^{'}(0) = g(0) = 0$$

Allora $h \in \mathcal{O}(R)$, in particolare è sviluppabile in serie di Taylor in 0. Poiché $h(0) = h'(0) = 0$, in un disco Δ di centro 0 contenuto in R, possiamo scrivere:

$$h(z) = a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n + \cdots = z^2(a_2 + \cdots + a_n z^{n-2} + \cdots).$$

Denotiamo $s(z)$ la somma della serie $a_2 + \cdots + a_n z^{n-2} + \cdots$. Poiché $z^2 s(z) = z^2 f(z)$ in Δ^*, ne segue che la funzione

$$\tilde{f}(z) = \begin{cases} f(z) & \text{per } z \in R \setminus \{0\} \\ s(z) & \text{per } z \in \Delta, \end{cases}$$

estende olomorficamente $f(z)$ in R. $\square$

Dal teorema di estendibilità segue dunque che una singolarità isolata di una funzione f è rimovibile se e solo se f è estendibile olomorficamente su c.

Esempio. La funzione $(\sin z)/z$ ha una singolarità rimovibile in 0. Infatti la funzione

$$f(z) = \begin{cases} (\sin z)/z & \text{per } z \neq 0 \\ 1 & \text{per } z = 0, \end{cases}$$

la estende olomorficamente in 0.

Definizione 1.1.2. Sia c un polo di f. Chiamiamo *ordine* di c l'intero m così definito:

$$m := \min\{n \in \mathbb{N} : |(z-c)^n f(z)| < +\infty \text{ in un intorno di } c\}.$$

Definizione 1.1.3. Sia f olomorfa in una regione R e sia a in R un suo zero. Si definisce *ordine dello zero* a, il più piccolo $n \in \mathbb{N}$ tale che $f^{(n)}(a) \neq 0$

Teorema 1.1.4. *Sia $f \in \mathcal{O}(R \setminus \{c\})$. Sono equivalenti i seguenti fatti:*

1) *f ha un polo di ordine m in c,*

2) *esiste una funzione $g \in \mathcal{O}(R)$ tale che $g(c) \neq 0$ e $f(z) = (z-c)^{-m} g(z)$ per $z \in R \setminus \{c\}$,*

3) *esiste un intorno aperto U di c in R ed esiste $h \in \mathcal{O}(U)$ con uno zero di ordine m in c e priva di zeri in $U \setminus \{c\}$, tali che $f = 1/h$ in $U \setminus \{c\}$,*

4) *esiste un intorno aperto U di c in R ed esistono due numeri reali M^*, $M_* > 0$ tali che per ogni $z \in U \setminus \{c\}$ si ha*

$$M_* |z-c|^{-m} \leq |f(z)| \leq M^* |z-c|^{-m}.$$

Dimostrazione. 1) $\Rightarrow$ 2). La funzione $(z-c)^m f(z)$ ha un singolarità rimovibile in c essendo m l'ordine di c; dunque, dal teorema di estendibilità di Riemann, esiste una funzione $g(z) \in \mathcal{O}(R)$ tale che $g_{|R\setminus\{c\}} = (z-c)^m f(z)$. Supponiamo per assurdo che c sia uno zero di ordine k per g, allora, in un intorno di c, si ha $g(z) = (z-c)^k \tilde{g}(z)$ con k intero > 0 e $\tilde{g}(c) \neq 0$. In questo caso, si ha $\lim_{z\to c} |(z-c)^{m-k} f(z)| = \tilde{g}(c) \neq 0$, contro l'ipotesi di minimalità di m.
2) $\Rightarrow$ 3). Da $g(c) \neq 0$ e g olomorfa in R, segue che esiste un intorno U di c tale che g non ha zeri in U. Quindi $h(z) := (z-c)^m / g(z)$, $z \in U$, è la funzione cercata.
3) $\Rightarrow$ 4). Per ipotesi, per ogni $z \in U$ si ha $h(z) = (z-c)^m \tilde{h}(z)$ con $\tilde{h}$ olomorfa e priva di zeri in U. Poniamo

$$M_* := \inf\{|\tilde{h}(z)|^{-1} : z \in U\} > 0$$

(poiché $\tilde{h}$ olomorfa in U)

$$M^* := \sup\{|\tilde{h}(z)|^{-1} : z \in U\} < +\infty$$

(poiché $\tilde{h}$ è priva di zeri in U).
Allora da $|f(z)| = |z-c|^m|\tilde{h}(z)|^{-1}$ otteniamo la 4).
Proviamo infine che 4) $\Rightarrow$ 1). Abbiamo

$$|(z-c)^m f(z)| \leq M^*,$$

da cui $|(z-c)^m f(z)|$ risulta limitata in un intorno di c, cioè c è un polo per f e

$$|(z-c)^{m-1} f(z)| \geq |z-c|^{-1} M_*,$$

da cui $|(z-c)^{m-1} f(z)|$ non è limitata in un intorno di c, cioè l'ordine di c è proprio m. □ □

Esempio. La funzione $1/z^2$ ha un polo di ordine 2 in 0.

L'equivalenza tra 1) e 3) nel teorema appena dimostrato significa che le singolarità polari compaiono essenzialmente nelle funzioni reciproche di funzioni olomorfe.

Definizione 1.1.5. Una funzione f è detta *meromorfa* in una regione $R \subseteq \mathbb{C}$ se è olomorfa in $R \setminus P$ con P sottoinsieme discreto di R tale che ogni suo punto è un polo per f.

Esempi.

1. Ogni funzione olomorfa in R è meromorfa.
2. Ogni funzione razionale $p(z)/q(z)$ (p e q polinomi primi fra loro) è meromorfa in $\mathbb{C}$, i suoi poli sono tutti e soli gli zeri di q.
3. $(\cos z)^{-1}$ è una funzione meromorfa in $\mathbb{C}$, con poli $\frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

È facile vedere che vale la:

Proposizione 1.1.6. *L'insieme delle funzioni meromorfe in una regione R, è un campo rispetto alle operazioni di addizione e moltiplicazione tra funzioni.*

1.2 Singolarità essenziali

Un'idea del comportamento di una funzione olomorfa nell'intorno di una singolarità essenziale è data dal teorema di Casorati–Weierstrass (1868):

Teorema 1.2.1. *Sia $f \in \mathcal{O}(R \setminus \{c\})$. Sono equivalenti i seguenti fatti:*
1) *c è una singolarità essenziale di f;*
2) *per ogni intorno U di c in R, l'insieme $f(U \setminus \{c\})$ è denso in $\mathbb{C}$;*
3) *esiste una successione $\{z_n\}$ in $R \setminus \{c\}$ convergente a c tale che la successione $\{|f(z_n)|\}$ non ha limite.*

Dimostrazione. 1) $\Rightarrow$ 2). Supponiamo che esista un intorno U di c in R tale che $f(U \setminus \{c\})$ non è denso in $\mathbb{C}$. Sia $a \in \mathbb{C}$ un punto non aderente a $f(U \setminus \{c\})$, allora esiste un disco $\Delta = \Delta(a, r)$, $r > 0$, tale che $f(U \setminus \{c\}) \cap \Delta = \emptyset$. Dunque per ogni $z \in U \setminus \{c\}$ si ha $|f(z) - a| > r$. Quindi la funzione

$$g(z) := (f(z) - a)^{-1}$$

è olomorfa in $U \setminus \{c\}$ e da $|g(z)| \leq 1/r$ segue che $g(z)$ ha una singolarità rimovibile in c . Sia $\tilde{g}(z)$ la funzione che estende olomorficamente g a tutto U. Se $\tilde{g}(c) \neq 0$ allora la funzione

$$\tilde{f}(z) := a + (\tilde{g}(z))^{-1}$$

estende olomorficamente f a tutto U contro il fatto che c è una singolarità essenziale. Se $\tilde{g}(c) = 0$, allora

$$\lim_{z \to c} |f(z)| = \lim_{z \to c} \left| a + \frac{1}{g(z)} \right| = +\infty$$

e dunque c è un polo di f, ancora un assurdo.
2) $\Rightarrow$ 3). Se ogni successione $\{z_n\}$ in $R \setminus \{c\}$ convergente a c è tale che $\{|f(z_n)|\}$ ha limite finito, allora esiste un intorno U di c tale che $f(U \setminus \{c\})$ è contenuto in un compatto di $\mathbb{C}$. Se invece è tale che $\{|f(z_n)|\}$ ha limite infinito, allora esiste un intorno U di c tale che $f(U \setminus \{c\})$ è contenuto nel complementare di un compatto di $\mathbb{C}$. In entrambi i casi $f(U \setminus \{c\})$ non è denso in $\mathbb{C}$. Dunque esiste un successione $\{a_n\}$ in $R \setminus \{c\}$ convergente a c tale che $\{|f(a_n)|\}$ ha limite finito l , ed esiste una successione $\{b_n\}$ in $R \setminus \{c\}$

convergente a c tale che $\{|f(b_n)|\}$ ha limite $+\infty$. Allora la successione $\{c_m\}$, con $c_m = a_{2n}$ per $m = 2n$ e $c_m = b_{2n+1}$ per $m = 2n+1$, è convergente a c ed è tale che $\{|f(c_m)|\}$ non ha limite. L'implicazione 3) $\Rightarrow$ 1) è ovvia ed il teorema è dimostrato. $\square$

Ad illustrazione del teorema di Casorati–Weierstrass, mostriamo che la funzione $e^{1/z}$ assume in un qualunque intorno di zero ogni valore complesso eccetto lo 0. Innanzi tutto osserviamo che

$$\lim_{x\to 0^+} x^n e^{\frac{1}{x}} = +\infty \quad \text{per ogni n} \in \mathbb{N}$$

dunque 0 è una singolarità essenziale per $e^{\frac{1}{z}}$. D'altra parte sia $a = \rho e^{\imath\theta}$ un qualsiasi numero complesso $\neq 0$ e poniamo $\frac{1}{z} = \alpha + \imath\beta$. Dall'equazione $e^{\frac{1}{z}} = e^{\alpha}e^{\imath\beta} = a$ otteniamo $\left|e^{\frac{1}{z}}\right| = e^{\alpha} = \rho$, inoltre $\arg e^{\frac{1}{z}} = \beta = \theta + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$, allora deve essere $z = (\log\rho + \imath(\theta + 2k\pi))^{-1}$, poiché per $|k| \to +\infty$ si ha che $z \to 0$ la funzione $e^{\frac{1}{z}}$ assume qualsiasi valore complesso $\neq 0$ in un qualsiasi intorno di 0.

Il teorema di Casorati–Weierstrass è perfezionato dal grande teorema di Picard, che verrà presentato e dimostrato nell'ultimo capitolo.

1.3 Serie di Laurent

Nello studio delle singolarità isolate delle funzioni olomorfe sono di aiuto le serie di Laurent. Ricordiamo che una funzione olomorfa in una corona

$$C(c; r_1, r_2) := \{z \in \mathbb{C} : r_1 < |z - c| < r_2,\ r_1, r_2 \geq 0\}$$

ammette uno sviluppo in serie del tipo $\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} a_n(z - z_0)^n$.
Possiamo dimostrare la seguente proposizione che caratterizza le singolarità isolate:

Proposizione 1.3.1. *Sia R una regione e f sia una funzione olomorfa in $R \setminus \{c\}$. Sia $\Delta = \Delta(c, r) \subset R$ e sia*

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} a_n(z - c)^n$$

lo sviluppo di Laurent di f nella corona $\Delta \setminus \{c\}$. Allora vale quanto segue:

1) *c è una singolarità rimovibile se e solo se $a_n = 0$ per ogni $n < 0$,*

2) *c è un polo di ordine m se e solo se $a_n = 0$ per ogni $n < -m$ e $a_{-m} \neq 0$,*

3) *c è una singolarità essenziale se e solo $a_n \neq 0$ per infiniti indici < 0.*

Dimostrazione. Se c è una singolarità rimovibile per f allora, per definizione, $|f(z)|$ è limitato in un intorno di c. Se lo sviluppo in serie di Laurent ammettesse termini con esponente negativo, si avrebbe o $\lim_{z\to c} |f(z)| = +\infty$ oppure (nel caso di infiniti termini ad esponente negativo) limite inesistente, dunque un assurdo. Se lo sviluppo in serie di f non ha termini ad esponente negativo, allora è un normale sviluppo in serie di Taylor di centro c e dunque c è al più una singolarità rimovibile per f. Sia ora c un polo di ordine m per f. Allora, per quanto appena dimostrato, lo sviluppo in serie di Laurent della funzione deve avere termini ad esponente negativo. Sia n il massimo intero per cui $a_{-n} \neq 0$. Allora si ha: $0 < \lim_{z\to c} |z-c|^n |f(z)| < +\infty$. Se $n \neq m$ si ha evidentemente un assurdo, essendo m l'ordine di polo di c. Il terzo punto infine segue immediatamente dai precedenti due. □

Esempi.

1) La funzione $(\cos z - 1)z^{-1}$ ha un'unica singolarità in 0. In $\mathbb{C}^*$ possiamo scrivere

$$\frac{\cos z - 1}{z} = \frac{1}{z}\left(\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n} - 1\right) = -\frac{z}{2!} + \frac{z^3}{4!} - \frac{z^5}{6!} + \cdots = \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n-1}$$

ne segue che 0 è una singolarità rimovibile.

2) Consideriamo lo sviluppo di Laurent della funzione $(z^2-1)^{-1}$ nel disco bucato $\Delta = \Delta(1,2) \setminus \{1\}$. Si ha:

$$\frac{1}{z^2-1} = \frac{1}{2}\frac{1}{z-1} - \frac{1}{2}\frac{1}{z+1} = \frac{1}{2}\frac{1}{z-1} + \left(\frac{1}{2}\right)\sum_{n\geq 0}\left(\frac{-1}{2}\right)^{n+1}(z-1)^n$$

da cui si vede che 1 è un polo di ordine 1 per la funzione considerata.

3) La funzione $\exp(z^{-1})$ ha un'unica singolarità isolata in 0. Dal teorema di Laurent (v. [D]), si può scrivere $\exp(z^{-1}) = f^+ + f^-$ con f^+ funzione intera

e $\lim_{z\to\infty} f^-(z) = 0$. Poichè $\lim_{z\to\infty} \exp(z^{-1}) = 1$, si ha necessariamente $f^+ \equiv 1$. Allora $f^-(z) = \exp(z^{-1}) - 1$ per ogni $z \in \mathbb{C}^*$. Così si ha

$$f^-(z) = e^{1/z} - 1 = \sum_{n\geq 1} \frac{z^{-n}}{n!}$$

Dunque, per ogni z in $\mathbb{C}^*$ possiamo scrivere

$$\exp(z^{-1}) = 1 + \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n! z^n} = \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n! z^n},$$

ne segue che 0 è una singolarità essenziale per la funzione.

1.4 Singolarità all'infinito

Estendiamo ora il concetto di funzione olomorfa alla sfera di Riemann $\mathbb{C}_\infty$, definendo le singolarità all'infinito.

Definizione 1.1. Sia R una regione di $\mathbb{C}_\infty$. Una funzione f definita in R è detta *olomorfa* in R se, nell'intorno di ciascun punto di R diverso da ∞, la funzione $f \circ \varphi^{-1}$ (dove φ è la proiezione stereografica di $S^2 \setminus \{N\}$ da N sul piano $x_3 = 0$, con $N = (0, 0, 1)$) è una funzione olomorfa di z e nell'intorno di ciascun punto di R, diverso da 0, la funzione $f \circ \psi^{-1}$ (dove ψ è la proiezione stereografica di $S^2 \setminus \{S\}$ da S sul piano $x_3 = 0$, con $S = (0, 0, -1)$) è una funzione olomorfa di $w{=}1/z$ (v. [D]).

Definizione 1.2. Il punto $\infty \in \mathbb{C}_\infty$ è una *singolarità isolata* per f, se esiste un intorno U_∞ di ∞ (cioè il complementare di un compatto in $\mathbb{C}$) tale che f non ha altre singolarità in U_∞ oltre ∞.

Esempi

1) La funzione e^z ha una singolarità isolata in ∞.
2) La funzione $(\sin z)^{-1}$ ha una singolarità non isolata in ∞, infatti nel complementare di un qualunque compatto di $\mathbb{C}$ esistono infiniti zeri di $\sin z$.

Sia f una funzione avente una singolarità isolata in ∞. Allora, per quanto appena detto segue che:

- *una funzione f olomorfa in un intorno di ∞, avrà una singolarità rimovibile, un polo, o una singolarità essenziale in ∞, secondo che la funzione f espressa nella coordinata locale $w=1/z$ avrà una singolarità rimovibile, un polo, o una singolarità essenziale in* 0.

Esempi.
1) La funzione e^z è olomorfa in tutto $\mathbb{C}$ ed ha una singolarità essenziale in ∞. Infatti, operando il cambio di coordinata, otteniamo $e^{1/w}$, questa ha una singolarità essenziale in 0.
2) Ogni funzione razionale $p(z)/q(z)$ (con p e q polinomi primi tra loro) ha in ∞ una singolarità rimovibile o un polo secondo che $\deg p(z) < \deg q(z)$ oppure $\deg p(z) \geq \deg q(z)$.

Una funzione olomorfa in $\mathbb{C}$ è detta *intera*. Sono esempi di funzioni intere le funzioni polinomiali, e^z, $\cos z$ e $\sin z$. Le prime hanno un polo in ∞, mentre le altre hanno in ∞ una singolarità essenziale. È chiaro dal teorema fondamentale dell'algebra, che una funzione polinomiale assume ogni valore complesso. Da quanto abbiamo visto in precedenza e^z assume qualsiasi valore complesso $\neq 0$ in un qualunque intorno di ∞. Proviamo che $\sin z$ assume ogni valore complesso in un qualsiasi intorno di ∞: operiamo il cambio di coordinata $z = \frac{1}{w}$ e studiamo la funzione $\sin(1/w)$ in un generico intorno di 0. Si ha:

$$\sin \frac{1}{w} = \frac{1}{2\imath}(e^{\frac{\imath}{w}} - e^{\frac{-\imath}{w}}).$$

Sia $c \in \mathbb{C}$. Risolvendo l'equazione $e^{\frac{\imath}{w}} - e^{\frac{-\imath}{w}} = 2ic$ si ottiene $e^{\frac{i}{w}} = ic \pm \sqrt{1-c^2} \neq 0$ per ogni $c \in \mathbb{C}$. D'altra parte la funzione $e^{\frac{i}{w}}$ assume, in un intorno di 0, ogni valore complesso non nullo; concludiamo che $\sin z$ assume, in un qualunque intorno di ∞, qualsiasi valore complesso un'infinità numerabile di volte. Un analogo ragionamento si può fare per la funzione $\cos z$.
Concludiamo questo paragrafo con il seguente:

Teorema 1.4.1. *Ogni funzione meromorfa in $\mathbb{C}_\infty$ è una funzione razionale.*

Dimostrazione.
In ∞ la funzione f può essere olomorfa o avere un polo, in ogni caso si ha che f è olomorfa nel complementare di un compatto K contenente tutti i suoi

poli (p_1,...,p_k) che devono essere in numero finito (altrimenti f non avrebbe una singolarità isolata all'infinito). Per ogni polo p_i sia Δ_i un piccolo disco in K di centro p_i, non contenente altri poli di f. Sia f_i la parte principale dello sviluppo di Laurent di f in $\Delta_i^* := \Delta_i \setminus \{p_i\}$. La funzione $h := f - \sum_{i=1}^{k} f_i$ è olomorfa in $\mathbb{C}$, ossia è una funzione intera. Ora, se lo sviluppo in serie di Taylor della h in 0 ($\sum_{n\geq 0} a_n z^n$) avesse infiniti coefficienti non nulli, operando il cambio di coordinata, risulterebbe che la funzione f, per la proposizione appena dimostrata, avrebbe una singolarità essenziale in ∞. Allora $h = \sum_{n\geq 0}^{m} a_n z^n$, dove m è l'ordine di polo in ∞ (eventualmente m=0 se la f è olomorfa in ∞), ossia

$$f = \sum_{n\geq 0}^{m} a_n z^n + \sum_{i=1}^{k} f_i$$

e dunque f è una funzione razionale. $\square$

Capitolo 2

Il "piccolo" teorema di Picard

In questo capitolo dimostreremo il "piccolo" teorema di Picard: una funzione intera non costante omette al più un valore. Come annunciato nell'introduzione non seguiremo la dimostrazione originale di Picard (1879), ma utilizzeremo un teorema di A. Bloch (1924) che tratta della "taglia" dell'immagine del disco unitario $\Delta = \Delta(0,1)$ sotto una mappa olomorfa (v. [R2], Cap.10).

2.1 Il teorema di Bloch

Abbiamo bisogno di alcuni lemmi.

Lemma 2.1.1. *Sia G un aperto limitato in $\mathbb{C}$ e $f : \overline{G} \to \mathbb{C}$ continua, tale che $f_{|G} : G \to \mathbb{C}$ sia aperta. Sia $a \in G$ tale che $s := \min_{z \in \partial G} |f(z) - f(a)| > 0$, allora $f(G)$ contiene $\Delta(f(a), s)$.*

Dimostrazione. Essendo f continua e G limitato , $\partial f(G)$ è compatto, allora la funzione continua $h : \partial f(G) \to \mathbb{R}$, $h(w) := |w - f(a)|$, ammette minimo. Sia w_* il punto di minimo, allora si avrà $d(\partial f(G), f(a)) = |w_* - f(a)|$. D'altra parte, essendo $w_* \in \partial f(G)$, esiste una successione $\{w_n\}$ in $f(\overline{G})$ tale che $\lim\ w_n = w_*$. Sia z_n una successione in $\overline{G}$ tale che, per ogni n, $w_n = f(z_n)$. Poiché $\overline{G}$ è compatto (e f è continua in $\overline{G}$) si ha $\lim z_n = z_* \in \overline{G}$ e $f(z_*) = w_*$. D'altra parte, poiché per ipotesi $f(G)$ è aperto, z_* non può appartenere a G. Dunque $|f(z_*) - f(a)| \geq s$, da cui $\Delta(f(a), s) \subset f(G)$ $\square$.

Ci chiediamo ora come si possa stimare il numero s. Applicando il lemma 2.1.1 ad una funzione olomorfa ci aspettiamo che s dipenda da $|f|_{\overline{G}}$ e da $f'(a)$. La stima viene facile per funzioni definite in dischi $V := \Delta(a, r)$.

Lemma 2.1.2. *Sia $f \in \mathcal{O}(\overline{V})$, non costante, tale che $|f'|_V \leq 2|f'(a)|$. Allora $\Delta(f(a), R) \subset f(V)$ con $R := (3 - 2\sqrt{2})r|f'(a)|$ $(3 - 2\sqrt{2} > 1/6)$.*

Dimostrazione. Si può supporre $a = f(a) = 0$. Sia $A(z) := f(z) - f'(0)z$ allora si nota che

$$A(z) = \int_{[0,z]} [f'(\zeta) - f'(0)]d\zeta$$

da cui

$$|A(z)| \leq \int_0^1 |f'(zt) - f'(0)||z|dt$$

Sia $v \in V$. Allora, dalla formula integrale di Cauchy si ha

$$f'(v) - f'(0) = \frac{1}{2\pi\imath}\left(\int_{\partial V} \frac{f'(\xi)}{\xi - v}d\xi - \int_{\partial V} \frac{f'(\xi)}{\xi}d\xi\right)$$

Dunque

$$|f'(v) - f'(0)| \leq \frac{|v|}{r - |v|}|f'|_{\overline{V}}$$

Da cui

$$|A(z)| \leq \int_0^1 \frac{|zt||f'|_{\overline{V}}}{r - |zt|}|z|dt \leq \frac{|f'|_{\overline{V}}|z^2|}{r - |z|}\int_0^1 tdt = \frac{|f'|_{\overline{V}}|z|^2}{2(r - |z|)}$$

Sia $0 < \rho < r$. Allora, per ogni z tale che $|z|=\rho$ vale

$$|f(z) - f'(0)z| \geq |f'(0)|\rho - |f(z)|$$

Essendo per ipotesi $|f'|_V \leq 2|f'(0)|$ segue che

$$|f(z)| \geq \left(\rho - \frac{\rho^2}{r - \rho}\right)|f'(0)|$$

Il termine tra parentesi assume massimo (3 - $2\sqrt{2}$)r in $\rho^* = \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)r$.
Allora $|f(z)| \geq (3 - 2\sqrt{2})r|f'(0)| =: R$.
Per ogni $|z|=\rho^*$ si ha

$$\Delta(0, R) \subset f(0, \rho^*) \subset f(V)$$

come volevamo □

Posto $\Delta = \Delta(0,1)$, sia f olomorfa in $\overline{\Delta}$. Allora la funzione $|f^{'}(z)|(1-|z|) \in \mathcal{C}(\overline{\Delta})$. Sia M il suo massimo, assunto in $p \in \Delta$.

Teorema 2.1.3 (Bloch)**.** *Se f non è costante, allora $f(\Delta)$ contiene il disco $\Delta(f(p), (\frac{3}{2} - \sqrt{2})M)$ con $(3/2 - \sqrt{2})M > |f'(0)|/12$*

Dimostrazione. Sia $t = \frac{1}{2}(1-|p|)$. Allora si ha M=$2t|f^{'}(p)|$. Inoltre $\Delta(p,t) \subset \Delta$ e $1-|z| \geq t$ per ogni $z \in \Delta(p,t)$. Dunque, da

$$|f'(z)|(1-|z|) \leq 2t|f'(p)|$$

segue

$$|f^{'}(z)| \leq 2|f^{'}(p)|$$

per ogni z in $\Delta(p,t)$, e si conclude che

$$\Delta(f(p), (3-2\sqrt{2})t|f^{'}(p)|) \subset f(\Delta)$$

come volevamo. □

Corollario 2.1.4. *Sia f olomorfa nella regione R di $\mathbb{C}$ e $c \in R$ tale che $f^{'}(c) \neq 0$. Allora l'aperto $f(R)$ contiene dischi di raggio $\rho|f^{'}(c)|/12$ per ogni ρ tale che $0 < \rho < d(c, \partial R)$.*

Dimostrazione. Si può supporre $c = 0$. Per ogni ρ tale che $0 < \rho < d(c, \partial R)$, si ha $\overline{\Delta(0,\rho)} \subset R$, quindi la funzione $h(z)$:=$f(\rho z)/\rho f^{'}(0) \in \mathcal{O}(\overline{\Delta})$. Essendo $h^{'}(0)$=1, per il teorema di Bloch, $h(\Delta)$ contiene dischi di raggio $1/12$. D'altra parte $f(\rho z)$=$\rho f^{'}(0)h(z)$, dunque si può concludere $|f(z)| \geq \rho|f'(0)|/12$. □

Osservazione. Dal corollario segue subito che se g è una funzione intera non costante, allora $g(\mathbb{C})$ contiene dischi di raggio qualsiasi. Questa osservazione risulta essenziale per la dimostrazione del "piccolo" teorema di Picard.

2.2 Dimostrazione del "piccolo" teorema di Picard

Abbiamo bisogno di un altro risultato preparatorio:

Teorema 2.2.1. *Sia R una regione semplicemente connessa e sia $f \in \mathcal{O}(R)$. Allora valgono:*

1) *se -1, $1 \notin f(R)$ esiste $g \in \mathcal{O}(R)$ tale che $f = \cos g$,*

2) *se 0, $1 \notin f(R)$ allora esiste $g \in \mathcal{O}(R)$ tale che*

$$f = (1 + \cos \pi(\cos \pi g))/2,$$

3) *se $g \in \mathcal{O}(R)$ è una funzione soddisfacente il punto 2), allora $g(R)$ non contiene alcun disco $\Delta(c, 1)$ con $c \in g(R)$.*

Dimostrazione.
1) Per ipotesi, l'equazione $1 - f^2$ non ha zeri in R e dunque ammette una radice olomorfa in R (v. [R1], cap. 9,3) tale che $1 - f^2 = r^2$ cioè $f^2 + r^2 = 1$. Quindi la funzione $f + \imath r$ ha modulo 1 in R. Allora esiste una funzione $F \in \mathcal{O}(R)$ tale che $f + \imath r = e^{\imath F}$ e $f - \imath r = e^{-\imath F}$ allora

$$f = \frac{e^{\imath F} + e^{-\imath F}}{2} = \cos F.$$

2) La funzione $2f - 1$ omette i valori -1 , 1 in R dunque, per il punto 1), esiste $F \in \mathcal{O}(R)$ tale che $2f - 1 = \cos \pi F$ con $F(R) \cap \mathbb{Z} = \emptyset$. In particolare F omette i valori 1, -1 quindi esiste $g \in \mathcal{O}(R)$ tale che $F = \cos \pi g$, allora

$$2f - 1 = \cos \pi(\cos \pi g) \ .$$

3) Poniamo

$$A := \{m \pm \frac{\imath}{\pi} \log(n + \sqrt{n^2 - 1})\}, \ \ \forall \ m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}.$$

Allora i punti di A sono vertici di una "griglia" avente i lati orizzontali di "lunghezza" 1 e i lati verticali di "lunghezza" strettamente < 1, infatti:

$$\log(n + 1 + \sqrt{(n+1)^2 - 1}) - \log(n + \sqrt{n^2 - 1}) =$$

$$= \log\left(\frac{1+1/n+\sqrt{1+2/n}}{1+\sqrt{1-1/n^2}}\right) \leq$$

$$\leq \log\left(1+1/n+\sqrt{1+2/n}\right) \leq \log(2+\sqrt{3}) < \pi \ .$$

Dimostriamo ora che $A \cap g(R) = \emptyset$.
Sia $a(m,n) := \{m \pm \frac{\imath}{\pi}\log(n+\sqrt{n^2-1})\}$ un qualunque punto di A, allora

$$\cos\pi(a(m,n)) = \frac{1}{2}(e^{\imath\pi a(m,n)} + e^{-\imath\pi a(m,n)}) =$$

$$= \frac{1}{2}(-1^m)[(n+\sqrt{n^2-1})^{-1} + n + \sqrt{n^2-1}] = (-1)^m n \ .$$

Dunque $\cos\pi(\cos\pi a) = \pm 1$ per ogni $a(m,n)$ in A. Quindi $A \cap g(R) = \emptyset$. Inoltre per ogni c in $\mathbb{C}$, $\Delta(c,1) \cap A \neq \emptyset$, allora $g(R)$ non contiene alcun disco $\Delta = \Delta(c,1)$ per ogni c in R. $\square$

Siamo ora in grado di dimostrare il "piccolo" teorema di Picard:

Teorema 2.2.2. *Ogni funzione intera non costante omette al più un valore complesso.*

Dimostrazione. Sia $h \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ tale che a e $b \notin h(\mathbb{C})$. Allora la funzione $f(z) := (h(z)-a)(b-a)^{-1}$ non assume i valori 0 e 1. Allora, per il teorema precedente, esiste $g \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ tale che $f(z) = (1+\cos\pi(\cos\pi g))/2$ e $g(\mathbb{C})$ non contiene alcun disco di raggio 1. D'altra parte, per il teorema di Bloch, ogni funzione intera non costante contiene dischi di raggio qualsiasi, dunque g è costante, e di conseguenza anche f e h lo sono.

Il seguente corollario è un "teorema di Picard" per le funzioni meromorfe:

Corollario 2.2.3. *Una funzione h meromorfa in $\mathbb{C}$ che omette tre valori distinti $a,b,c \in \mathbb{C}$ è costante.*

Dimostrazione. La funzione $1/(h-a)$ è intera e omette i valori $1/(b-a)$ e $1/(c-a)$.$\square$

Osservazione. Il "piccolo" teorema di Picard può essere formulato come segue: *se f e g sono funzioni intere tali che* (*) $e^f + e^g = 1$, *allora sono*

costanti.
Infatti se due funzioni intere f e g sono tali che (*) vale, allora la funzione e^f non assume il valore 0 e neanche il valore 1, dunque per il toerema 2.2.2 è costante, quindi anche f e g lo sono.
Viceversa, consideriamo una funzione intera f che omette i valori a e b. Come abbiamo visto nella dimostrazione del teorema 2.2.2 possiamo supporre $a = 0$ e $b = 1$. In particolare f omette il valore 0 dunque esiste una funzione intera h tale che $f = e^h$. Allora la funzione $e^h - 1$ omette il valore 0 dunque esiste una funzione intera g tale che $1 = e^h + e^g$. Per ipotesi questo implica che h e g sono costanti: quindi, in particolare, f è costante.

Diamo ora un teorema che è un'applicazione diretta del teorema di Picard. In generale una funzione intera f non ha alcun punto fisso, ossia non esistono z tali che $f(z) = z$ (basta considerare la funzione $z + e^z$), tuttavia vale il seguente:

Teorema 2.2.4. *Sia f una funzione intera. Allora $f \circ f$ (ancora una funzione intera) ammette un punto fisso, a meno che f non sia una traslazione (cioè $f(z) = z + b$, per qualche b).*

Dimosrazione. Supponiamo che $f \circ f$ non abbia punti fissi. Allora neanche f ne ha, e segue che la funzione $g(z) := [f(f(z)) - z]/[f(z) - z]$ è intera. Questa funzione omette i valori 0, 1 quindi per il "piccolo" teorema di Picard esiste c in $\mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ tale che:

$$f(f(z)) - z = c(f(z) - z), \quad z \in \mathbb{C}$$

Derivando si ottiene $f'(z)[f'(f(z)) - c] = 1 - c$. Essendo $c \neq 1$, f' non ha zeri e $f'(f(z))$ non assume il valore c. Dunque $f' \circ f$ omette i valori distinti 0 e c, quindi f' è costante e $f = az + b$, ma visto che f non ha punti fissi, $a = 1$ e $b \neq 0$.$\square$

Capitolo 3

Il "grande" teorema di Picard

In questo capitolo dimostreremo il "grande" teorema di Picard: una funzione olomorfa, nell'intorno di una sua singolarità essenziale, assume, infinite volte, qualsiasi valore complesso eccetto al più uno. Come annunciato nell'introduzione non seguiremo la dimostrazione originale di Picard (1879), ma utilizzeremo alcuni risultati riguardanti le "famiglie normali" di funzioni olomorfe, in particolare il teorema di Montel (1927). In questo capitolo seguiamo essenzialmente la trattazione svolta in [R2, cap.10].

3.1 Famiglie normali e teorema di Ascoli–Arzelà

In questo paragrafo seguiamo essenzialmente la trattazione data in [A, cap.5,4]

Definizione 3.1. Una famiglia $\mathfrak{F}$ di funzioni continue in una regione $R \subseteq \mathbb{C}$ è detta *normale,* se ogni successione $\{f_n\}$ di funzioni di $\mathfrak{F}$ contiene una sottosuccessione uniformemente convergente sui compatti di R. Si osservi che la definizione non richiede che la funzione limite della sottosuccessione appartenga a $\mathfrak{F}$.

Ricordiamo ora la proprietà di Bolzano−Weierstrass degli insiemi compatti di $\mathbb{R}^n$: *ogni successione di punti in un sottoinsieme compatto di* $\mathbb{R}^n$ *ammette una sottosuccessione convergente.* La somiglianza della proprietà di normalità con la proprietà di Bolzano–Weierstrass è evidente, ma questa sarà ancora più esplicita dopo che avremo introdotto nello spazio $\mathcal{C}(R)$, delle

funzioni continue a valori in $\mathbb{C}$, una metrica tale che la convergenza rispetto ad essa significhi la convergenza uniforme sui compatti di R. In questo modo si potranno caratterizzare "topologicamente" le famiglie normali nello spazio metrico $\mathcal{C}(R)$.
Questa metrica si costruisce come segue.

Poniamo

$$\rho(a,b) := \frac{|a-b|}{1+|a-b|},$$

qualunque siano $a, b \in \mathbb{C}$. La funzione $\rho : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{R}^+$ è una distanza limitata in $\mathbb{C}$. Sia $\{K_n\}$ una successione crescente di compatti in R, ossia tale che per ogni compatto K in R esiste un indice m tale che $K \subset K_m$. Una tale successione può essere costruita in diversi modi. Si definisca, per esempio, $K_n := \{z \in R \text{ t.c. } |z| \leq n \text{ e } d(z, \partial R) \geq 1/n\}$. È chiaro che K_n è un compatto e che per ogni compatto K in R esiste un n tale che $K \subset K_n$ (dal momento che ogni compatto di R ha distanza positiva da ∂R).

Per ogni coppia f, g di funzioni in $\mathcal{C}(R)$, poniamo

$$\rho_n(f,g) := \sup_{z \in K_n} \rho(f(z), g(z)).$$

È chiaro che $\rho_n(f,g)$ può essere interpretato come la "distanza" tra f e g in K_n. Poniamo poi

$$d^*(f,g) := \sum_{n=1}^{+\infty} 2^{-n} \rho_n(f,g)$$

($d^*(f,g)$ è ben definito poiché la serie a destra converge). Si verifica facilmente che d^* è una metrica in $\mathcal{C}(R)$.

Notiamo che:

• *la convergenza rispetto alla metrica d^* è equivalente alla convergenza uniforme sui compatti.*

Infatti se $\{f_n\}$ converge a f rispetto a d^*, fissato $\varepsilon > 0$ esiste un indice n_0 tale che per $n > n_0$ si ha $d^*(f_n, f) < \varepsilon$ e dunque $\rho_m(f_n, f) < 2^m \varepsilon$; ciò implica che $\{f_n\}$ converge a f uniformemente in K_m non solo rispetto a d^* ma anche rispetto alla metrica usuale in $\mathbb{C}$.

Viceversa, supponiamo che $\{f_n\}$ converga a f uniformemente sui compatti di R. Allora $\rho_m(f_n, f) \to 0$ per ogni m ed inoltre, poiché $2^{-m}\rho_m(f_n, f) < 2^{-m}$ e la serie $\sum 2^{-m}$ (indipendente da n) converge, si ha che $d^*(f_n, f) \to 0$.

Proposizione 3.1.1. *Una famiglia $\mathfrak{F} \subset \mathcal{C}(R)$ è normale se e solo se la sua chiusura (rispetto alla metrica d^*) è compatta.*

Dimostrazione. Segue dal teorema di Bolzano–Weierstrass: uno spazio metrico è compatto se e solo se ogni successione possiede una sottosuccessione convergente (v. [C–T–V], p.188). Se applichiamo questo teorema a $\mathfrak{F}$ si ha che $\mathfrak{F}$ è compatta se e solo se $\mathfrak{F}$ è normale e le funzioni limite delle sottosuccessioni convergenti appartengono a $\mathfrak{F}$. D'altra parte se $\mathfrak{F}$ è normale lo è anche la sua chiusura rispetto alla metrica d^*. □

Definizione 3.2. Una famiglia $\mathfrak{F} \subset \mathcal{C}(R)$ è detta *equicontinua* in $R' \subset R$, se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un $\delta > 0$ tale che qualunque sia $f \in \mathfrak{F}$ si ha $|f(z_1) - f(z_2)| < \varepsilon$ per ogni coppia di punti $z_1, z_2 \in R'$ soddisfacenti la condizione $|z_1 - z_2| < \delta$. La $\mathfrak{F}$ è detta *localmente equicontinua* in R, se per ogni $z \in R$ esiste un intorno U di z in R tale che $\mathfrak{F}_{|U}$ è equicontinua in U. È chiaro che $\mathfrak{F}$ è localmente equicontinua in R, se e solo se è equicontinua sui compatti di R.

Si ha il seguente teorema di Ascoli–Arzelà:

Teorema 3.1.2. *Una famiglia $\mathfrak{F} \subset \mathcal{C}(R)$ è normale se e solo se:*

1) *$\mathfrak{F}$ è equicontinua in ogni compatto K di R,*

2) *per ogni fissato $z \in R$ e per ogni $f \in \mathfrak{F}$ i valori $f(z)$ giacciono in un compatto.*

Dimostrazione. Proviamo che la condizione 1) è necessaria. Infatti in caso contrario esistono: $\varepsilon > 0$, due successioni $\{z_n\}, \{z'_n\} \subset K$ e una successione $\{f_n\} \subset \mathfrak{F}$, tali che $|z_n - z'_n| \to 0$ e $|f_n(z_n) - f_n(z'_n)| \geq \varepsilon$ qualunque sia n. Poiché K è compatto, esistono sottosuccessioni di $\{z_n\}$ e $\{z'_n\}$ convergenti allo stesso limite ζ in K. Inoltre, per la normalità di $\mathfrak{F}$, esiste una sottosuccessione di $\{f_n\}$ che converge uniformemente in K ad una funzione continua

f, uniformemente continua in K. Senza perdere in generalità possiamo supporre che le tre sottosuccessioni abbiano lo stesso sistema di indici $\{n_i\}$. Per l'uniforme continuità di f, esiste un indice i tale che

$$|f_{n_i}(z_{n_i}) - f(z_{n_i})|\,, \quad \left|f_{n_i}(z_{n_i}) - f(z'_{n_i})\right|, \quad \left|f(z'_{n_i}) - f_{n_i}(z'_{n_i})\right| < \frac{\varepsilon}{3}\cdot$$

Allora è chiaro che $\left|f_{n_i}(z_{n_i}) - f_{n_i}(z'_{n_i})\right| < \varepsilon$, una contraddizione.

Mostriamo ora che anche la 2) è necessaria: per questo basta provare che la chiusura dell'insieme dei valori $f(z)$, $z \in R$ e $f \in \mathfrak{F}$, è un compatto. Sia $\{w_n\}$ una successione nella chiusura dell'insieme dei valori assunti in R dalle funzioni di $\mathfrak{F}$. Per ogni indice n, sia $f_n \in \mathfrak{F}$ tale che $|f_n(z) - w_n| < 1/n$. Allora, per la normalità, esiste una sottosuccessione $\{f_{n_i}(z)\}$ convergente, e dunque allo stesso limite converge la sottosuccessione $\{w_{n_i}\}$. Dal teorema di Bolzano–Weierstrass segue l'asserto.

Passiamo ora a provare che le condizioni sono sufficienti; utilizzeremo il famoso "procedimento diagonale di Cantor".

Sia $Q \subset R$ un sottoinsieme numerabile e ovunque denso in R, ossia tale che $\overline{Q} = R$. Possiamo arrangiare Q in una successione $\{q_i\}$. Facciamo vedere che dalla successione $\{f_n\}$ è possibile estrarre una sottosuccessione che converge in ogni punto di $\{q_i\}$. Per la condizione 2) è possibile determinare una sottosuccesione $\left\{f_{n_{1j}}(z)\right\}$ di $\{f_n\}$ che converge in q_1. Per la medesima condizione possiamo determinare una sottosuccessione $\left\{f_{n_{2j}}(z)\right\}$ della sottosuccessione precedente che converge in q_2, e così di seguito. Allora è possibile formare un quadro di indici del tipo

$$\begin{array}{ccccccccc}
n_{11} & < & n_{12} & < & \cdots & < & n_{1j} & < & \cdots \\
n_{21} & < & n_{22} & < & \cdots & < & n_{2j} & < & \cdots \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
n_{i1} & < & n_{i1} & < & \cdots & < & n_{ij} & < & \cdots \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots
\end{array}$$

tale che ogni sottosuccessione di $\{f_n\}$ corrispondente ad una riga è sottosuccessione di quella corrispondente alla riga precedente. La successione "diagonale" $\{f_{n_{ii}}\}$ è una sottosuccessione della successione $\{f_n\}$ convergente in ogni punto q_i. Per semplicità di notazione poniamo $m_j := n_{jj}$. Sia ora K un sottoinsieme compatto di R e supponiamo che $\mathfrak{F}$ sia equicontinua in

K. Mostreremo che $\{f_{m_i}\}$ converge uniformemente in K. Fissato $\varepsilon > 0$ sia $\delta > 0$ tale che per z, z' in K e $f \in \mathfrak{F}$ la condizione $|z - z'| < \delta$ implichi $|f_{m_i}(z) - f_{m_i}(z')| < \varepsilon/3$. Poiché K è compatto può essere coperto con un numero finito di dischi di raggio $\delta/2$. Scegliamo un punto q_k da ciascuno di tali dischi, allora per i, j abbastanza grandi si ha $\left|f_{m_i}(q_k) - f_{m_j}(q_k)\right| < \varepsilon/3$. Per ogni z nel disco cui appartiene q_k si ha $|f_{m_i}(z) - f_{mi}(q_k)| < \varepsilon/3$ e $\left|f_{m_i}(z) - f_{m_j}(q_k)\right| < \varepsilon/3$, quindi

$$\left|f_{m_i}(z) - f_{m_j}(z)\right| < \varepsilon.$$

Poiché tutti i valori di $f(z)$ appartengono ad un sottoinsieme compatto di $\mathbb{C}$ (dunque completo) la sottosuccessione $\{f_{m_i}\}$ converge uniformemente in K. □

Osserviamo che sostituendo al posto della distanza data dal modulo la metrica d di uno spazio metrico qualsiasi $\mathcal{M}$, la stessa dimostrazione estende il teorema di Ascoli–Arzelà a famiglie di funzioni continue a valori in $\mathcal{M}$: questa è la presentazione usuale del teorema nei testi di Analisi.

3.2 Teorema di Montel

Sia $\mathfrak{F}$ una famiglia di funzioni olomorfe in una regione R. La famiglia $\mathfrak{F}$ è detta *limitata* in $A \subset R$, se esiste $M > 0$ tale che $\|f\|_A \leq M$ per ogni $f \in \mathfrak{F}$. La famiglia $\mathfrak{F}$ è detta *localmente limitata in* R, se per ogni punto $z \in R$ esiste un intorno U_z di z in R tale che $\mathfrak{F}$ è limitata in U_z. È chiaro che ciò accade se e solo se $\mathfrak{F}$ è limitata in ogni compatto di R. Abbiamo il seguente

Lemma 3.2.1. *Sia $\mathfrak{F}$ una famiglia di funzioni olomorfe nella regione R, ivi localmente limitata. Allora $\mathfrak{F}$ è localmente equicontinua.*

Dimostrazione. Si tratta di far vedere che per ogni punto c in R ed ogni $\varepsilon > 0$, esiste un disco Δ di centro c in R tale che $|f(w) - f(z)| \leq \varepsilon$ qualunque siano $z, w \in \Delta$ e $f \in \mathfrak{F}$. Sia r abbastanza piccolo così che $\overline{\Delta(c, 2r)} \subset R$. Dalla formula integrale di Cauchy si ha

$$f(w) - f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Delta(c,2r)} \frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta - w} - \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Delta(c,2r)} \frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta - z} =$$

$$\frac{w-z}{2\pi i}\int_{\partial\Delta(c,2r)}\frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta-w)(\zeta-z)}.$$

Poiché $|(\zeta-w)(\zeta-z)|\geq r^2$ qualunque siano $z,w\in\Delta(c,r)$ e $\zeta\in\partial\Delta(c,2r)$, allora per ogni coppia $z,w\in\Delta(c,r)$ e $f\in\mathfrak{F}$ si ha

$$|f(w)-f(z)|\leq 2r^{-1}\,|w-z|\,\|f\|_{\Delta(c,2r)}\,.$$

D'altra parte $\mathfrak{F}$ è localmente limitata in R e dunque si ha

$$C=2r^{-1}\sup\left\{\|f\|_{\Delta(c,2r)}:f\in\mathfrak{F}\right\}<+\infty.$$

Poiché possiamo supporre $C>0$ per concludere basta porre $\Delta:=\Delta(c,\delta)$ con $\delta=\min\{\varepsilon/C,r\}$. □

Siamo in grado di provare il seguente teorema di Montel:

Teorema 3.2.2. *Ogni famiglia $\mathfrak{F}$ di funzioni olomorfe in una regione R è normale, se e solo se è localmente limitata in R.*

Dimostrazione. Per provare che la condizione è necessaria basta provare che $\sup\{\|f\|_K:f\in\mathfrak{F}\}<+\infty$ per ogni compatto $K\subset R$. Se esiste un compatto K' in R per il quale ciò non è vero, allora esiste una successione $\{f_n\}$ di funzioni di $\mathfrak{F}$ tale che $\lim_{n\to+\infty}|f_n|=+\infty$. Per la normalità questa successione ammette una sottosuccessione $\{f_{n_k}\}$ convergente uniformemente sui compatti di R ed allora, posto $f\in\mathcal{O}(R)$ il suo limite, si ha

$$\|f\|_{K'}\geq\|f_{n_k}\|_{K'}-\|f-f_{n_k}\|_{K'}$$

e $\|f\|_{K'}$ risulterebbe non limitata, una contraddizione. Che la condizione è sufficiente segue dal teorema di Ascoli e Arzelà: per il lemma precedente vale il punto 1) del teorema **??** (infatti se $\mathfrak{F}$ è localmente equicontinua è equicontinua sui compatti) e d'altra parte vale anche il punto 2) essendo la famiglia localmente limitata in R. □

Notiamo che il teorema è falso per funzioni in $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$: basta considerare la successione $\{\sin nx\}$ la quale non converge puntualmente (notiamo che questa successione non è localmente equicontinua). La seconda parte del teorema di Montel può essere dimostrata senza ricorrere al teorema di Ascoli e Arzelà, che in senso stretto non è un teorema sulle funzioni olomorfe (v. [R2], p.150).

3.3 Successioni di funzioni olomorfe e teorema di Vitali

Come ben noto, se una serie di potenze $\sum a_n z^n$ converge in un punto $z_0 \neq 0$ essa converge nel disco $|z| < |z_0|$. Questo fenomeno di "propagazione" della convergenza si presenta anche in situazioni più generali ed il teorema di Vitali, che tra poco enunceremo, ne è un esempio.

Ricordiamo che una successione di funzioni olomorfe che converge uniformemente sui compatti di R ha per limite una funzione olomorfa in R. Abbiamo il seguente:

Lemma 3.3.1. *Sia $\{f_n\}$ una successione di funzioni olomorfe in una regione R, ivi localmente limitata. Se ogni sua sottosuccessione convergente uniformemente sui compatti di R converge a f, allora $\{f_n\}$ converge a f uniformemente sui compatti di R.*

Dimostrazione. Supponiamo il contrario e sia K un compatto di R tale che $\|f_n - f\|_K$ non converga a zero. Allora esiste un $\varepsilon > 0$ ed esiste una sottosuccessione $\{f_{n_i}\}$ tale che $\|f_{n_i} - f\|_K \geq \varepsilon$ per ogni $i \in \mathbb{N}$. La successione $\{f_{n_i}\}$ è pure localmente limitata, per il teorema di Montel segue che $\{f_{n_i}\}$ è una famiglia normale e quindi possiamo estrarre da essa una sottosuccessione $\{g_k\}$ che converge uniformemente ad f sui compatti di R, allora, poiché $\|g_k - f\|_K \geq \varepsilon$, si ha una contraddizione. □

Siamo ora in grado di provare il seguente teorema di Vitali:

Teorema 3.3.2. *Sia $\{f_n\}_{n\geq 0}$ una successione di funzioni olomorfe in una regione R, ivi localmente limitata. Allora i seguenti fatti sono equivalenti:*

1) *la successione $\{f_n\}_{n\geq 0}$ converge uniformemente sui compatti di R,*

2) *esiste un punto $c \in R$ tale che per ogni $k \in \mathbb{N}$ la successione numerica $\left\{f_n^{(k)}(c)\right\}_{n\geq 0}$ ha limite finito,*

3) *l'insieme $L := \{z \in R : \exists \lim_{n\to+\infty} f_n(z) \neq \infty\}$ ha un punto di accumulazione in R.*

Dimostrazione. 1)⇒2). Dall'ipotesi segue che per ogni $k \in \mathbb{N}$ la successione $\left\{f_n^{(k)}\right\}_{n\geq 0}$ converge uniformemente sui compatti di R e dunque la 2) segue trivialmente.

Vediamo che 2)⇒3). Sia Δ_c un disco di centro c la cui chiusura è contenuta in R e tale che $\left\{f_{n|\Delta_c}\right\}_{n\geq 0}$ è limitata. Vogliamo provare che

(∗) $\left\{f_{n|\Delta_c}\right\}_{n\geq 0}$ *converge uniformemente sui compatti di* Δ_c.

In tal modo dimostreremo che c è il punto di accumulazione cercato per l'insieme L dell'enunciato.

Senza perdere in generalità possiamo supporre che $\Delta_c = \Delta := \Delta(0,1)$. Sia $\sum a_{n,k} z^k$ lo sviluppo in serie di f_n in Δ, ricordiamo che $a_{n,k} = f_n^{(k)}(0)/k!$. Per ipotesi $a_k := \lim_{n\to+\infty} a_{n,k}$ esiste finito per ogni k. Poiché la disuguaglianza di Cauchy implica $|a_{n,k}| \leq 1$, allora si ha anche $|a_k| \leq 1$ e dunque $\sum a_k z^k$ converge in Δ (infatti per ogni $\zeta \in \Delta$ la serie $\sum \left|a_k \zeta^k\right|$ e maggiorata dalla serie geometrica $\sum |\zeta|^k$). Sia $f(z)$ la somma di questa serie. Fissato r, $0 < r < 1$, qualunque sia n, se $|z| \leq r$, per ogni $m \geq 1$ si ha

$$|f_n(z) - f(z)| \leq \sum_{k=0}^{m-1} |a_{n,k} - a_k|\, r^k + 2r^m \sum_{l=1}^{+\infty} r^l = \sum_{k=0}^{m-1} |a_{n,k} - a_k|\, r^k + 2\frac{r^m}{1-r}\cdot$$

Fissato $\varepsilon > 0$, possiamo determinare m in modo che $2r^m(1-r)^{-1} \leq \varepsilon/2$, inoltre, poiché

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{m-1} |a_{n,k} - a_k|\, r^k = 0,$$

esiste un n_0 tale che per ogni $n \geq n_0$ si ha $|f_n(z) - f(z)| \leq \varepsilon$ in $|z| \leq r$, e ciò prova l'asserto (∗). Poiché $\Delta_c \subset R$, si ha immediatamente che 2)⇒3).

Resta da provare che 3)⇒1). In virtù del lemma precedente è sufficiente provare che tutte le sottosuccessioni di $\{f_n\}$ convergenti sui compatti hanno lo stesso limite, ma ciò è ovvio poiché, per il teorema di identità, due funzioni olomorfe in R che coincidono su un insieme dotato di un punto di accumulazione coincidono in R. □

Per comprendere pienamente l'essenza del teorema di Vitali è bene fare un paragone col teorema di identità: come una funzione olomorfa in una regione R è completamente determinata quando sono assegnati i suoi valori in un

insieme avente un punto di accumulazione in R, così una successione di funzioni olomorfe in R, ivi localmente limitata, converge sui compatti in R non appena converge in insieme di punti avente un punto di accumulazione in R.

Terminiamo questo paragrafo osservando che i teoremi di Montel e di Vitali sono equivalenti. Qui abbiamo dedotto il teorema di Vitali dal teorema di Montel, ma il teorema di Vitali può essere provato indipendentemente dal teorema di Montel (v. [S]). D'altra parte, se $\{f_n\}_{n\geq 0}$ è una successione di funzioni olomorfe in R che è localmente limitata in R, si può applicare il procedimento diagonale di Cantor per estrarre da essa una sottosuccessione che converge puntualmente su un sottoinsieme numerabile e denso in R. Il teorema di Vitali implica allora che la sottosuccessione converge uniformemente sui compatti di R e si ha il teorema di Montel.

3.4 Dimostrazione del "grande" teorema di Picard

Con l'aiuto di alcuni di lemmi e del teorema di Schottky ci proponiamo ora di dimostrare il "grande" teorema di Picard, che, come già osservato nel primo capitolo, risulta essere un perfezionamento di terema di Casorati−Weierstrass e offre un'idea precisa sul comportamento di una funzione olomorfa nell'intorno di una sua singolarità essenziale.
Nella dimostrazione giocano un ruolo fondamentale le proprietà delle funzioni olomorfe che omettono i valori $0, 1$ e un punto chiave è espresso da un teorema di F.H. Schottky che ora proveremo. Poniamo:

$$\mathcal{F}(\overline{\Delta}) := \left\{ f \in \mathcal{O}(\overline{\Delta}) : f \text{ omette i valori } 0 \text{ e } 1 \right\}.$$

Prima di procedere facciamo alcune considerazioni.

Osservazioni.
1) Se $\cos \pi a = \cos \pi b$, allora $b = \pm a + 2n,\ n \in \mathbb{Z}$ (si ottiene subito ricordando che $\forall\ a$ e $b \in \mathbb{C}$ vale $\cos \pi a - \cos \pi b = -2 \sin \frac{\pi}{2}(a+b) \sin \frac{\pi}{2}(a-b)$).
2) Per ogni $\zeta \in \mathbb{C}$ esiste $z \in \mathbb{C}$ tale che $\cos \pi z = \zeta$ e $|z| \leq 1 + |\zeta|$. Infatti, sia $z = \alpha + \imath\beta$ con $|\alpha| < 1$ e $\zeta = \cos \pi z$. Allora si vede che

$|\zeta|^2 = \cos^2 \pi\alpha + \sinh^2 \pi\beta$, ed essendo $\sinh^2 \pi^2\beta^2 > \pi^2\beta^2$ segue che

$$|z| = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \leq \sqrt{1 + |\zeta|^2/\pi^2} \leq 1 + |\zeta|.$$

Lemma 3.4.1. *Per ogni $f \in \mathcal{F}(\overline{\Delta})$ esiste $h \in \mathcal{O}(\overline{\Delta})$ tale che*

i) $f = (1 + \cos \pi(\cos \pi h))/2$,

ii) $|h(0)| \leq 3 + 2\,|f(0)|$,

iii) $|h(z)| \leq |h(0)| + 12\rho/(1-\rho)$ *per ogni z tale che* $|z| \leq \rho, 0 < \rho < 1$.

Dimostrazione. Dal teorema 2.2.1 segue che $2f - 1 = \cos \pi\widetilde{g}$ con $\widetilde{g} \in \mathcal{O}(\overline{\Delta})$ e per il secondo punto dell'osservazione precedente, esiste b tale che $\cos \pi b = 2f(0) - 1 = cos\pi\tilde{g}(0)$ e $|b| \leq 1 + |2f(0) - 1| \leq 2 + 2\,|2f(0)|$. Per il primo punto dell'osservazione precedente si ha che $b = \pm\widetilde{g}(0) + 2n, n \in \mathbb{Z}$. È chiaro che $2f - 1 = \cos \pi(\pm\widetilde{g} + 2n)$. Poiché le funzioni $\pm\widetilde{g} + 2n$ omettono tutti i valori interi, esiste $\widetilde{h} \in \mathcal{O}(\overline{\Delta})$ tale che $\pm\widetilde{g} + 2n = \cos \pi\widetilde{h}$. Per la stessa ragione, esiste a tale che $\cos \pi a = b$ con $|a| \leq 1 + |b| \leq 3 + 2\,|2f(0)|$. Poiché $\cos \pi a = \cos \pi\widetilde{h}(0)$, similmente a quanto fatto per $\widetilde{g}$, possiamo passare ad una funzione $h = \pm\widetilde{h} + 2m$ con $h(0) = a$ e $\pm\widetilde{g} + 2n = \cos \pi h$. Ciò prova i primi due punti.

Per il teorema 2.2.1 $h(\Delta)$ non contiene dischi di raggio 1. Poiché $d(z, \partial\Delta) \geq 1 - \rho$ quando $|z| \leq \rho$, il corollario 2.1.4 implica che $12(1 - \rho)\,|h'(z)| \leq 1$, ossia $|h'(z)| \leq 1/12(1-\rho)$. Allora per tutti gli z tali che $|z| \leq \rho$ da

$$h(z) - h(0) = \int_{[0,z]} h'(\zeta)d\zeta$$

si ha

$$|h(z)| - |h(0)| \leq |h(z) - h(0)| \leq \left| \int_{[0,z]} h'(\zeta)d\zeta \right| \leq \rho/12(1-\rho)$$

e dunque vale *iii*) ed il lemma è provato. □

Poniamo

$$\mathcal{F}_r(\overline{\Delta}) := \left\{ f \in \mathcal{F}(\overline{\Delta}) : |f(0)| \leq r \right\}.$$

Teorema 3.4.2 (Schottky). *Per ogni $f \in \mathcal{F}_r(\overline{\Delta})$ si ha*

$$|f(z)| \leq K(\rho, r) := \exp\left[\pi \exp \pi \left(3 + 2r + \frac{12\rho}{(1-\rho)}\right)\right]$$

per tutti gli $z \in \Delta$ tali che $|z| \leq \rho$, $0 < \rho < 1$.

Dimostrazione. Per ogni $w \in \mathbb{C}$ si ha $|\cos w| \leq e^{|w|}$ e

$$\frac{|1 + \cos w|}{2} \leq \frac{1}{2} + \frac{e^{|w|}}{2} \leq e^{|w|}.$$

Allora, in virtù del lemma precedente, per ogni z tale che $|z| \leq \rho$ si ha

$$|f(z)| \leq \exp[\pi \exp(\pi\, |h(z)|)] \leq \exp[\pi \exp(\pi(3 + 2\,|f(0)| + 12\rho/(1-\rho))],$$

poiché $|f(0)| \leq r$ il teorema segue immediatamente. □

Il teorema di Schottky asserisce dunque che la crescita delle funzioni olomorfe in $\overline{\Delta}$ che omettono i valori 0 e 1 è stimata da una costante "universale". Osserviamo che avremmo potuto scegliere anziché 1/12, una qualsiasi costante k per la quale vale il teorema di Bloch.

Sia R una regione di $\mathbb{C}$ e denotiamo $\mathcal{F}(R)$ la famiglia delle funzioni olomorfe in R che omettono i valori 0 e 1. Sia $r > 0$ e, per un punto $\zeta \in R$, denotiamo $\mathcal{F}_{\zeta,r}(R)$ la sottofamiglia delle funzioni di $\mathcal{F}(R)$ tali che $|f(\zeta)| \leq r$.

Lemma 3.4.3. *Esiste un intorno U di ζ in R tale che $\mathcal{F}_{\zeta,r}(R)$ è limitata in U.*

Dimostrazione. Non si perde in generalità a supporre $\zeta = 0$. Sia $\Delta_{2\varepsilon}$ un disco di centro 0 e raggio $2\varepsilon, 0 < \varepsilon < 1/2$, tale che $\overline{\Delta_{2\varepsilon}} \subset R$. Dal teorema di Schottky segue che

$$\sup\left\{|f|_{\Delta_\varepsilon} : f \in \mathcal{F}_{0,r}(R)\right\} \leq K(\varepsilon, r) < +\infty,$$

ed il lemma è provato. □

Teorema 3.4.4 (Hürwitz). *Sia $\{f_n\}$ una successione di funzioni olomorfe in R convergente a f sui compatti di R. Sia A un aperto limitato tale che $\overline{A} \subset R$ e f non ha zeri in ∂A. Allora esiste un indice n_A tale che per ogni $n \geq n_A$ le funzioni f e f_n hanno lo stesso numero di zeri in $\overline{A}$. In particolare, se tutte le funzioni f_n non si annullano in R e f non è identicamente zero, allora f non ha zeri in R.*

Dimostrazione. Consideriamo prima il caso in cui A è un disco. Poniamo $\mu := \min\{|f(\zeta)| : \zeta \in \partial A\} > 0$. Possiamo scegliere n_A abbastanza grande in modo che $|f_n - f|_{\partial A} < \mu$ per $n \geq n_A$. Allora $|f_n(\zeta) - f(\zeta)| < |f(\zeta)|$ per ogni $\zeta \in \partial A$ e $n \geq n_A$. Per concludere questo caso basta applicare il noto teorema di Rouché (v. [D]) considerando f_n al posto di f e la presente funzione f al posto di g.
Sia ora A un aperto limitato qualsiasi. La funzione f ha un numero finito di zeri nel compatto $\overline{A}$ che denotiamo con $z_1, ..., z_k$. Siano $\Delta_1, ..., \Delta_k$ dischi di centro $z_1, ..., z_k$, due a due disgiunti, e tali che f non ha zeri nel compatto $K := \overline{A} \setminus (\cup_{i=1}^k \Delta_i)$. Allora, quasi tutte le funzioni f_n, cioè tutte eccetto un numero finito, sono prive di zeri in K e basta applicare il caso precedente. □

Proposizione 3.4.5. *Sia $p \in R$ fissato. L'insieme $\mathcal{F}_p(R)$ delle funzioni $h \in \mathcal{F}(R)$ tali che $|h(p)| \leq 1$ è una famiglia localmente limitata in R e quindi normale.*

Dimostrazione. L'insieme

$$A := \{z \in R : \mathcal{F}_p(R) \text{ è limitata in un intorno di } z\}$$

è aperto e non vuoto poiché, in virtù del lemma precedente, $p \in A$. Supponiamo che $A \subsetneq R$, allora il lemma precedente implica che esiste una successione $\{f_n\}$ in $\mathcal{F}_p(R)$ tale che $\lim f_n(\zeta) = \infty$ per un certo $\zeta \in \partial A \cap R$. Le funzioni $g_n := 1/f_n$ appartengono alla famiglia $\mathcal{F}(R)$ e poiché $\lim g_n(\zeta) = 0$, ancora per il lemma precedente, le g_n sono limitate in un intorno di ζ. Per il teorema di Montel, esiste allora una sottosuccessione $\{g_{n_k}\}$ che converge uniformemente in un disco D di centro ζ ad una funzione $g \in \mathcal{O}(D)$. Poiché le g_n non sono mai nulle mentre $g(\zeta) = 0$, per il teorema di Hürwitz, si ha $g \equiv 0$. Allora $\lim f_{n_k}(z) = \infty$ per ogni $z \in A$, una contraddizione e la proposizione è provata. □

Siamo ora in grado di provare il "grande" teorema di Picard:

Teorema 3.4.6. *Una funzione olomorfa nell'intorno di una singolarità essenziale assume, infinite volte, qualsiasi valore complesso eccetto al più uno.*

Dimostrazione. Supponiamo che f sia olomorfa in $\Delta^*(c,\delta)$ e che c sia una singolarità essenziale per f. Il teorema può essere enunciato come segue: se f non assume in $\Delta^*(c,\delta)$ i valori a, b, allora o c è rimovibile oppure è un polo.

Osserviamo che la funzione

$$\widetilde{f}(z) := \frac{f(c+\delta z)-a}{b-a}$$

ha una singolarità essenziale in 0, è olomorfa in $\Delta^* := \Delta^*(0,1)$ e non assume i valori $0, 1$. Per dimostrare il teorema basta allora far vedere che se una funzione $g \in \mathcal{O}(\Delta^*)$ non assume i valori 0 e 1, allora g o $1/g$ sono limitate in un intorno di 0. Sia dunque $g \in \mathcal{O}(\Delta^*)$ e consideriamo la successione $\{g_n\}$ con $g_n(z) := g(z/n)$; questa è una successione di funzioni olomorfe in $\mathcal{F}(\Delta^*)$. Se $\{g_n\}$ ha una sottosuccessione $\{g_{n_k}\}$ in $\mathcal{F}_0(\Delta^*)$ questa è limitata sui compatti di Δ^*(per la proposizione 3.4.5), in particolare $|g_{n_k}| \leq M$ per ogni $|z| = 1/2$ e $n_k \geq 1$, dunque $|g(z)| \leq M$ in $|z| = 1/2n_k$ e, per il principio del massimo, $|g(z)| < M$ per ogni z tale che $1/2n_{k+1} < |z| < 1/2n_k$ qualunque sia k. Ne segue che g è limitata in un intorno di 0. Se $\{g_n\}$ non ha una sottosuccessione $\{g_{n_k}\}$ in $\mathcal{F}_0(\Delta^*)$, allora per quasi tutti gli indici, cioè per tutti tranne un numero finito, si ha $l_n = 1/g_n \in \mathcal{F}_0(\Delta^*)$. Allora esiste una sottosuccessione $\{l_{n_k}\}$ che converge sui compatti di Δ^* e ragionando come sopra si ottiene che $1/g$ è limitata in un intorno di 0. Il teorema è provato. $\square$

Bibliografia

[A] L.V. Ahlfors; *Complex analysis*, McGraw–Hill 1966.

[C-T-V] V. Checucci, A. Tognoli, E. Vesentini; *Lezioni di topologia generale*, Feltrinelli 1968.

[D] A. Del Centina, *Teoria della funzioni*; in preparazione.

[P] C.E. Picard; *Sur un proprieté des fonctions entières* C. Rendes A. des Sc. 86 (1879) 1024-1027, *Sur les fonctions éntières*, 88 (1879) 662-665; *Oeuvres*, 1.

[R1] R. Remmert; *Theory of complex functions*, Springer 1989.

[R2] R. Remmert; *Classical topics in complex function theory*, Springer 1998.

[S] G. Sansone; *Lezioni sulla teoria delle funzioni di variabile complessa*, IV ed. Cedam 1963.